УДК 531.396, 534.011

Обухов А. Н., Паламарчук В. А., Бережная Е. В.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ «ТЕЛЕЖКА – ГРУЗ» МОСТОВОГО КРАНА

Распространённым типом грузоподъёмных машин являются мостовые краны [1], предназначенные для осуществления погрузочно-разгрузочных работ при различных технологических операциях в промышленных зданиях, на закрытых навесами площадках, а также на открытом воздухе. Несмотря на то, что конструкции мостовых кранов совершенствовались, в настоящее время имеют место многочисленные преждевременные отказы оборудования, что связано с конструктивными несовершенствами отдельных механизмов, узлов и элементов металлоконструкций кранов, а также с низким уровнем существующих методов расчета действующих на силовые элементы нагрузок. В этой связи вопросы динамического нагружения механизмов кранов в период их нестационарного движения остаются достаточно сложными [2] и актуальными на настоящий момент.

Цель работы – разработка математической модели динамического нагружения системы «тележка – груз» при нестационарном движении, позволяющей описать динамику системы на каждом из трёх этапов движения: разгон, движение с постоянной скоростью, торможение.

Согласно принятой расчетной схеме (рис. 1) ведем обозначения:

$y(t)$ – горизонтальное перемещение тележки под действием силы $F_t(y)$;

F_c – сила сопротивления движению;

$\varphi(t)$ – угол отклонения груза от его равновесного положения;

m_t, $m_{k,}$ $m_{\tilde{a}}$ – масса соответственно: тележки, колеса (колёс четыре), груза;

$\dot{y}(t)$ – скорость перемещения тележки;

r – радиус колеса

l – длина подвеса груза.

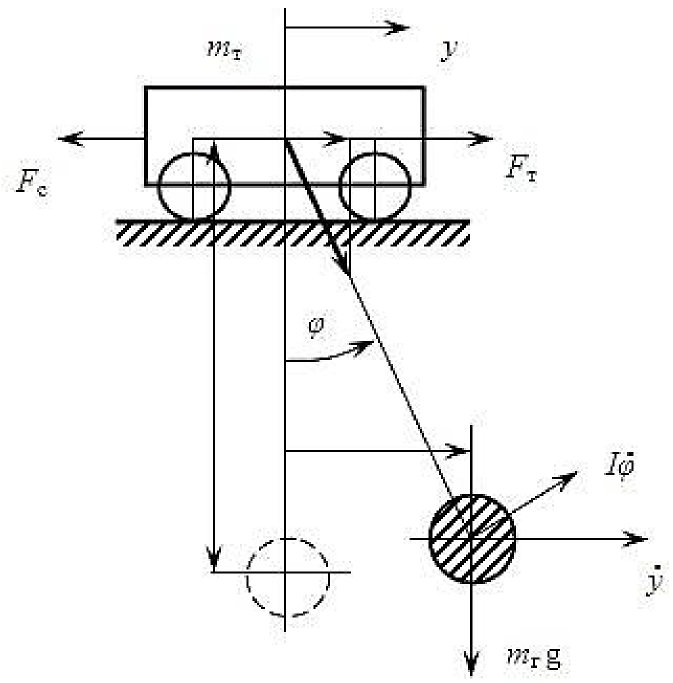

Рис. 1. Расчётная схема динамического нагружения системы «тележка – груз»

Скорость груза может быть записана в виде:

$$|v_г| = \sqrt{(\dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + (l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2} = \sqrt{\dot{y}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2}\,. \quad (1)$$

Найдём систему дифференциальных уравнений, описывающих движение системы «тележка-груз». Запишем кинетическую энергию механической системы «тележка – груз»:

$$T = T_1 + T_2\,. \quad (2)$$

Кинетическая энергия груза:

$$T_2 = \frac{m_г |v_г|^2}{2} = \frac{m_г}{2}\left(\dot{y}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\right). \quad (3)$$

Кинетическая энергия тележки:

$$T_1 = \frac{m_t + 4m_k}{2}\dot{y}^2 + \frac{4J_k}{2}\left(\frac{\dot{y}}{r}\right)^2, \quad (4)$$

где $J_k = \dfrac{m_k r^2}{2}$ – момент инерции колеса.

Тогда $T_1 = \dfrac{m_t + 4m_k}{2}\dot{y}^2 + m_k\dot{y}^2 = \dfrac{m_t + 6m_k}{2}\dot{y}^2$.

Обозначим приведенную массу тележки $M = m_t + 6m_k$.

Окончательно, кинетическую энергию системы «тележка – груз» можно записать в виде:

$$T = \frac{M}{2}\dot{y}^2 + \frac{m_г}{2}\left(\dot{y}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{y}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\right). \quad (5)$$

Запишем потенциальную работу внешних сил:

$$П = П_1 + П_2\,,$$

где $П_1 = -mgl(1-\cos\varphi)$ – потенциальная энергия груза;

$П_2 = \int\limits_0^y (F_t(y) - F_c)dy$ – работа внешних сил, приложенных к тележке.

Окончательно

$$П = -mgl(1-\cos\varphi) + \int\limits_0^y (F_t(y) - F_c)dy\,. \quad (6)$$

Запишем уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{\partial П}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1,2). \quad (7)$$

Здесь x_i и $\dot{x}_i$ = перемещения и скорости обобщенных координат:

$x_1 = y;\quad x_2 = \varphi$ – обобщённые координаты, их скорости: $\dot{x}_1 = \dot{y};\quad \dot{x}_2 = \dot{\varphi}$.

Используя равенство (5), найдём:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} + m_г(\dot{y} + l\dot{\varphi}\cos\varphi);\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_г\left(l\dot{y}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}\right);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_г l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi;\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = M\ddot{y} + m_г\left(\ddot{y} + l\ddot{\varphi}\cos\varphi - l\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right). \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_г\left(l\ddot{y}\cos\varphi + l\dot{y}\dot{\varphi}\sin\varphi + l^2\ddot{\varphi}\right)$$

Используя равенство (6), найдём:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y}=F_t(y)-F_c\,;\;\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}=-mgl\sin\varphi \tag{9}$$

Подставляя найденные выражения (8) и (9), в систему равенств (7), найдём систему дифференциальных уравнений, с помощью которой можно описать динамику системы «тележка – груз».

$$\begin{cases}(M+m_г)\ddot{y}+m_г l\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi\right)=F_t(y)-F_c;\\ m_г l^2\ddot{\varphi}+m_г l\cos\varphi\cdot\ddot{y}+m_г gl\sin\varphi=0.\end{cases} \tag{10}$$

Система дифференциальных уравнений (10) описывает динамику системы «тележка-груз». Учитывая, что в реальной ситуации $\varphi<<1$, можно пренебречь бесконечно малыми $\cos\varphi\approx 1;\quad \sin\varphi\cdot\dot{\varphi}\approx 0;\quad \sin\varphi\approx\varphi$, в этом случае систему (10) можно переписать в виде:

$$\begin{cases}(M+m_г)\ddot{y}+m_г l\ddot{\varphi}=F_t(y)-F_c;\\ \ddot{\varphi}+\frac{1}{l}\ddot{y}+\frac{g}{l}\varphi=0.\end{cases} \tag{11}$$

Преобразуем систему уравнений (11), из первого уравнения найдём $\ddot{y}$:

$$\ddot{y}=-\frac{m_г l\ddot{\varphi}}{M+m_г}+\frac{F_t(y)-F_c}{M+m_г}, \tag{12}$$

подставляя выражение (12) во второе уравнение системы, получим:

$\ddot{\varphi}-\frac{m_{\tilde{a}}}{M+m_{\tilde{a}}}\ddot{\varphi}+\frac{F_t(y)-F_c}{l(M+m_{\tilde{a}})}+\frac{g}{l}\varphi=0$ или $\frac{M}{M+m_г}\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=-\frac{F_t(y)-F_c}{l(M+m_г)}$, разделив на $\frac{M}{(M+m_{\tilde{a}})}$, найдём:

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\frac{M+m_г}{M}\varphi=-\frac{F_t(y)-F_c}{l\cdot M} \tag{13}$$

Объединяя (12) и (13), получим преобразованную систему уравнений в виде:

$$\begin{cases}\ddot{y}-\frac{m_{\tilde{a}}}{M}\left(\frac{g}{l}\right)(l\varphi)=\frac{F_t(y)-F_c}{M}\\ (l\ddot{\varphi})+\frac{g}{l}\frac{M+m_{\tilde{a}}}{M}(l\varphi)=-\frac{F_t(y)-F_c}{M}\end{cases} \tag{14}$$

Введём обозначения:

$$\omega_1^2=\frac{m_{\tilde{a}}}{M}\left(\frac{g}{l}\right);\quad \omega^2=\frac{M+m_{\tilde{a}}}{M}\left(\frac{g}{l}\right).$$

Цикл движения системы «тележка – груз» можно разбить на три периода [3]:

- период разгона, от начала движения до момента времени t^*, когда

$$F_t\left(y(t^*)\right)=F_c\,. \tag{15}$$

Система уравнений (14) примет вид:

$$\begin{cases}\ddot{y}-\omega_1^2(l\varphi)=\frac{F_t(y)-F_c}{M}\\ (l\ddot{\varphi})+\omega^2(l\varphi)=-\frac{F_t(y)-F_c}{M}\end{cases} \tag{16}$$

Начальные условия при этом

$$\begin{aligned} y(0) = \dot{y}(0) = 0; \\ \varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

- период движения системы с постоянной скоростью V_0.

$$\begin{cases} \ddot{y} - \omega_1^2 (l\varphi) = 0; \\ (l\ddot{\varphi}) + \omega^2 (l\varphi) = 0 \end{cases}. \tag{18}$$

Начальные условия при этом

$$\begin{aligned} y(0) = y(t^*); \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(t^*); \\ \varphi(0) = \varphi(t^*); \quad \varphi'(0) = \varphi(t^*). \end{aligned} \tag{19}$$

- период торможения системы;

$$\begin{cases} \ddot{y} - \omega_1^2 (l\varphi) = -\dfrac{F_t^*(y) + F_c}{M} \\ (l\ddot{\varphi}) + \omega^2 (l\varphi) = -\dfrac{F_t^*(y) + F_c}{M} \end{cases} \tag{20}$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} y(0) = 0; \quad \dot{y}(0) = \dot{y}(t_1) = V_0; \\ \varphi(0) = \varphi(t_1); \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(t_1). \end{aligned} \tag{21}$$

В системе (14) перейдём к безразмерным параметрам:

$y = l^* \xi, \quad 0 \le \xi \le 1.$,где l^* – расстояние, на которое нужно переместить груз.

$\tau = \omega t$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{M + m_{\tilde{a}}}{M} \dfrac{g}{l}}$ – собственная частота колебаний системы, а $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{m_{\tilde{a}}}{M} \dfrac{g}{l}}$.

$$\begin{cases} \ddot{y} - \omega_1^2 l\varphi = \dfrac{F_t(y) - F_c}{M} \\ l\ddot{\varphi} + \omega^2 l\varphi = -\dfrac{F_t(y) - F_c}{M} \end{cases} \tag{22}$$

Найдём производные y и φ:

$$\dot{y} = l^* \dot{\xi}_\tau \cdot \omega, \quad \ddot{y} = l^* \ddot{\xi}_{\tau\tau} \cdot \omega^2, \; l\dot{\varphi} = l\omega\dot{\varphi}_\tau, \quad l\ddot{\varphi} = l\omega^2 \ddot{\varphi}_{\tau\tau}.$$

Подставляя выражения y, φ и их производных в (22), получим:

$$\begin{cases} l^* \ddot{\xi}_{\tau\tau} \cdot \omega^2 - \omega_1^2 l\varphi = \dfrac{F_t(l^*\zeta) - F_c}{M} \\ l\omega^2 \ddot{\varphi}_{\tau\tau} + \omega^2 l\varphi = -\dfrac{F_t(l^*\zeta) - F_c}{M} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_{\tau\tau} - \left(\dfrac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \dfrac{l}{l^*} \varphi = \dfrac{F_t(l^*\xi) - F_c}{M \cdot l^* \omega^2} \\ \ddot{\varphi} + \varphi = -\dfrac{F_t(l^*\xi) - F_c}{M \cdot l\omega^2} \end{cases} \tag{23}$$

Обозначим $\left(\dfrac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \dfrac{l}{l^*} = \dfrac{m_{\tilde{a}} l}{(m_{\tilde{a}} + M) l^*} = \eta$.

Пусть $F_t(l^*\xi) = F_T e^{-\alpha l^* \xi} = F_T e^{-\beta\xi}$, где $\beta = \alpha l^*, \quad 0 \le \xi \le 1$.

Преобразуем правые части уравнений системы (23):

$$\frac{F_t(l^*\xi)-F_c}{M\cdot l^*\omega^2}=\frac{F_Te^{-\beta\xi}-F_c}{(M+m_г)g}\frac{l}{l^*}=a_1e^{-\beta\xi}-b_1,$$

$$\frac{F_t(l^*\xi)-F_c}{M\cdot l\omega^2}=a_1\frac{l^*}{l}e^{-\beta\xi}-b_1\frac{l^*}{l},$$

где $a_1=\frac{F_T}{(M+m_г)g}\frac{l}{l^*}$; $b_1=\frac{F_c}{(M+m_г)g}\frac{l}{l^*}$.

Окончательно систему уравнений в безразмерной форме можно записать в виде:

$$\begin{cases}\ddot{\xi}_{\tau\tau}-\eta\varphi=a_1e^{-\beta\xi}-b_1,\\ \ddot{\varphi}+\varphi=-(a_1e^{-\beta\xi}-b_1)\dfrac{l^*}{l}.\end{cases}\qquad(24)$$

Здесь безразмерные параметры:

$$\eta=\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2\frac{l}{l^*};\quad \beta=\alpha l^*;$$

$$a_1=\frac{F_T}{(M+m_г)g}\frac{l}{l^*},\quad b_1=\frac{F_c}{(M+m_г)g}\frac{l}{l^*},\qquad(25)$$

где $0\le\xi\le 1$.

Движение системы «тележка – груз» можно рассмотреть последовательно на трёх этапах:

Этап (период) первый – разгон.

Динамику разгона системы «тележка – груз» можно описать решением системы (24), удовлетворяющем начальным условиям $\xi(0)=\xi'_\tau(0)=0;\quad \varphi(0)=\varphi'_\tau(0)=0.$

на отрезке времени $0\le\tau\ge\tau^*$, где τ^* определяем из условия

$$a_1e^{-\beta\xi}-b_1=0\Rightarrow\quad e^{-\beta\xi}=\frac{b_1}{a_1}\Rightarrow\quad -\beta\xi=\ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right);$$

$$\xi^*=\xi(\tau^*)=-\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{b_1}{a_1}\right)=-\frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{F_c}{F_T}\right)=\ln\left(\frac{F_T}{F_c}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Путь тележки при разгоне составит $0\le\xi\le\xi^*$.

Этап (период) второй: движение с постоянной скоростью.

Динамику движения системы «тележка – груз» с постоянной скоростью можно описать решением системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases}\ddot{\xi}_{\tau\tau}-\eta\varphi=0;\\ \ddot{\varphi}+\varphi=0.\end{cases}\qquad(26)$$

удовлетворяющих начальным условиям

$$\xi(\tau)=\xi(\tau^*);\quad \dot{\xi}(\tau)=\dot{\xi}(\tau^*);$$
$$\varphi(\tau)=\varphi(\tau^*);\quad \dot{\varphi}(\tau)=\dot{\varphi}(\tau^*);\qquad(27)$$

Найдём решение системы (26), удовлетворяющее начальные условия (27). Общее решение второго уравнения системы (26) можно записать в виде:

$$\varphi(\tau)=\tilde{N}_1\cos(\tau-\tau^*)+C_2\sin(\tau-\tau^*)$$

Удовлетворяя начальным условиям (27), найдём $\tilde{N}_1=\varphi(\tau^*)$ и $\tilde{N}_2=\dot{\varphi}(\tau^*)$. Тогда угловые отклонения груза от вертикального положения равновесия изменяется по закону:

$$\varphi(\tau) = \varphi(\tau^*)\cos(\tau - \tau^*) + \dot{\varphi}(\tau^*)\sin(\tau - \tau^*). \tag{28}$$

Используя первое уравнение системы (26) $\ddot{\xi} = \eta\varphi$, или

$$\ddot{\xi} = \eta \cdot \left(\varphi(\tau^*)\cos(\tau - \tau^*) + \dot{\varphi}(\tau^*)\sin(\tau - \tau^*)\right). \tag{29}$$

Интегрируя дважды, найдём общее решение уравнения (29)

$$\xi(\tau) = -\eta \cdot \left(\varphi(\tau^*)\cos(\tau - \tau^*) + \dot{\varphi}(\tau^*)\sin(\tau - \tau^*)\right) + C_1\left((\tau - \tau^*)\right) + C_2. \tag{30}$$

Используя начальные условия (27) найдём C_1 и C_2:

$$C_1 = \dot{\xi}(\tau^*) + \eta\dot{\varphi}(\tau^*)\ ;\ C_2 = \xi(\tau^*) + \eta\varphi(\tau^*). \tag{31}$$

Тогда перемещение тележки на втором периоде движения можно определить зависимостью:

$$\xi(\tau) = \xi(\tau^*) + \eta\varphi(\tau^*) + \left(\dot{\xi}(\tau^*) + \eta\dot{\varphi}(\tau^*)\right)(\tau - \tau^*) - \eta\left(\varphi(\tau^*)\cos(\tau - \tau^*) + \varphi(\tau^*)\sin(\tau - \tau^*)\right). \tag{32}$$

Окончательно, на втором периоде движения системы «тележка – груз» законы перемещения принимают вид (28) и (32). При этом $\tau^* \le \tau \le \tau_1$, где $\tau = \tau_1$ момент включения торможения тележки.

Рассмотрим третий период движения тележки (торможение).

Динамику этого периода движения можно описать решением системы дифференциальных уравнений, аналогичных (24):

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_{\tau\tau} - \eta\varphi = a_1^* e^{-\beta^*(\xi - \xi_1)} - b_1, \\ \ddot{\varphi}_{\tau\tau} + \varphi = \left(a_1^* e^{-\beta^*(\xi - \xi_1)} + b_1\right)\dfrac{l^*}{l}. \end{cases} \tag{33}$$

где

$$\beta^* = \alpha^* l^*; \quad a_1^* = \frac{F_T^{\ *}}{(M + m_{\tilde{a}})g}, \tag{34}$$

F_T^* – наибольшая величина тормозной силы,

α^* – показатель степени в экспоненте при торможении.

Система (29) удовлетворяет начальным условиям:

$$\xi(0) = \xi(\tau_1); \quad \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}(\tau_1); \tag{35}$$

$$\varphi(0) = \varphi(\tau_1); \quad \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}(\tau_1);$$

Функции $\xi(\tau) = \xi(\tau - \tau_1)$ и $\varphi(\tau) = \varphi(\tau - \tau_1)$. $\tau_1 \le \tau \le \tau_2$.

ВЫВОДЫ

Построена система дифференциальных уравнений, с помощью которой можно описать динамику системы «тележка – груз» на каждом из трёх этапов движения: разгон, движение с постоянной скоростью, торможение. Для этапа движения с постоянной скоростью найдены законы перемещения, как тележки, так и груза. Численное решение предложенной системы дифференциальных уравнений может быть положено в основу математической модели механической системы «тележка – груз».

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грузоподъёмные машины / М. П. Александров, Л. Н. Колобов, Н. А. Лобов [и др.] – М. : Машиностроение, 1986. – 620 с.*
2. *Лобов Н. А. Динамика грузоподъёмных кранов / Н. А. Лобов – М. : Машиностроение, 1987. – 160 с.*
3. *Обухов А. Н. Моделирование системы «тележка-груз» мостового крана / А. Н. Обухов, В. А. Паламарчук // Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології у виробництві та освіті: стан, досягнення, перспективи розвитку. Матеріали Всеукраїнської науково-практичної інтернет конференції. – Черкаси. 2015. – С. 109–111.*

Статья поступила в редакцию 13.05.2015 г.